

Тема уроку: Числові функції. Зростаючі і спадні, парні і непарні функції.

Мета уроку: Узагальнення і систематизація знань учнів про числові функції (область визначення і область значення функцій, зростаючі і спадні функції, парні і непарні функції).

I. Мотивація навчання.

Процеси реального світу тісно пов'язані між собою. Серед різноманіття явищ вчені виділили такі, у яких взаємозв'язок величин настільки тісний, що, знаючи значення однієї з них, можна визначити значення другої величини.

Наприклад, знаючи сторону квадрата, можна знайти його площу або периметр.

! Залежність змінної y від змінної x , при якій кожному значенню x відповідає єдине значення y , називається функцією.

З поняттям функції ви познайомилися в курсі алгебри. Поняття функції є важливим поняттям курсу алгебри і початків аналізу, отже, ми повинні згадати і узагальнити відомості про функції. Крім того, досліджуючи властивості функцій, ми маємо можливість ґрунтовніше пізнати реальний світ.

II. Систематизація і узагальнення основних відомостей про числові функції.

Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D ставиться у відповідність по деякому правилу єдине число y із множини E .

Змінна x називається незалежною змінною або аргументом функції, а змінна y — залежною змінною або функцією.

Функцію позначають латинськими буквами $f, g, h...$ (або $f(x), g(x), h(x),...$) або рівностями $y = f(x), y = g(x), y = h(x)...$ Якщо задане конкретне значення незалежної змінної $x = x_0$, то $y_0 = f(x_0)$ називається значенням функції f в точці x_0 .

Область визначення функції позначається $D(f)$ (від англ. *define* — визначити). Множина, яка складається із всіх чисел $f(x)$ таких, що x належить області визначення функції f , називається областю значень функції і позначається $E(f)$ (від англ. *exist* — існувати).

Розглянемо *приклад*. Результати вимірювання температури тіла хворого в залежності від часу подано в таблиці:

Час доби x (год)	9	12	15	18	21	24
Температура тіла $y=f(x)$ (C°)	39	38,5	38,3	37,3	37,1	37

Залежність $y = f(x)$ є функцією, x — незалежна змінна, y — залежна змінна.

$$f(9) = 39, f(12) = 38,5, \dots, f(24) = 37.$$

$$D(f) = \{9; 12; 15; 18; 21; 24\}.$$

$$E(f) = \{39; 38,5; 38,3; 37,3; 37,1; 37\}.$$

Функцію можна задати за допомогою таблиці, графіка, формули.

Найчастіше функцію задають формулою, яка дає можливість одержати значення залежної змінної y , підставивши конкретне значення аргументу x .

Наприклад. Якщо кожному значенню x із множини дійсних чисел поставити у відповідність квадрат цього числа, то-функцію можна записати у вигляді формули: $y = x^2$ або $f(x) = x^2$.

Областю визначення функції $y = f(x)$, яка задана формулою, називається множина тих значень, які може приймати x , тобто формула має зміст (усі дії, вказані формулою, можна виконати). При знаходженні області визначення слід пам'ятати:

1) Якщо функція є многочленом $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то $D(y) = (-\infty; +\infty) = R$.

2) Якщо функція має вигляд $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени, то слід

вважати $g(x) \neq 0$ (знаменник дробу не дорівнює 0).

3) Якщо функція має вигляд $y = \sqrt{f(x)}$, то слід вважати $f(x) > 0$ (арифметичний квадратний корінь існує тільки з невід'ємних чисел).

! Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата «пробігає» всю область визначення функції $y = f(x)$, а друга координата — це відповідні значення функції в точці x .

Виконання вправ

1. Знайдіть значення функції:

а) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ у точках 1; -1; 5;

б) $f(x) = \sqrt{x-3}$ у точках 3; 12; 52.

Відповідь: а) $f(1) = 2, f(-1) = 0; f(5) = 1, 2;$

б) $f(3) = 0; f(12) = 3; f(52) = 7$

2. Функцію задано формулою $y = x^2$ на області визначення $D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Задайте її за допомогою:

а) таблиці; б) графіка.

Відповідь:

а)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

б) рис. 1

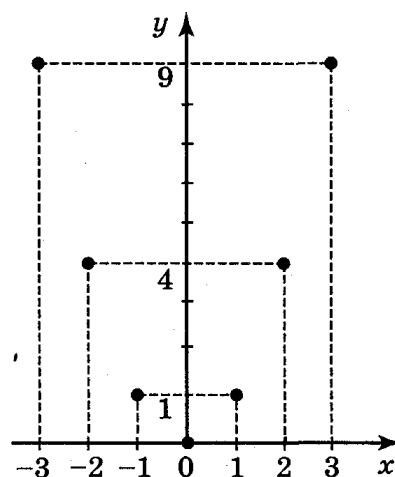


Рис. 1

3. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = x^2 + x^3$; б) $y = \frac{x+2}{x-3}$; в) $y = \frac{x^3+1}{x(x+2)}$; д) $y = \frac{x+6}{x^2-5x+4}$; е) $y = \sqrt{x+6}$.

Відповідь:

а) $D(y) = R$; б) $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; в) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$;

г) $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; д) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$;

е) $D(y) = [-6; +\infty)$.

4. Знайдіть область значень функції: а) $y = \sqrt{x^2+4}$; б) $y = \sqrt{x^2+4} - 1$.

Відповідь: а) $E(y) = [2; +\infty)$; б) $E(y) = [1; +\infty)$.

5. Для функцій, графіки яких зображено на рис. 2, вкажіть $D(y)$ і $E(y)$.

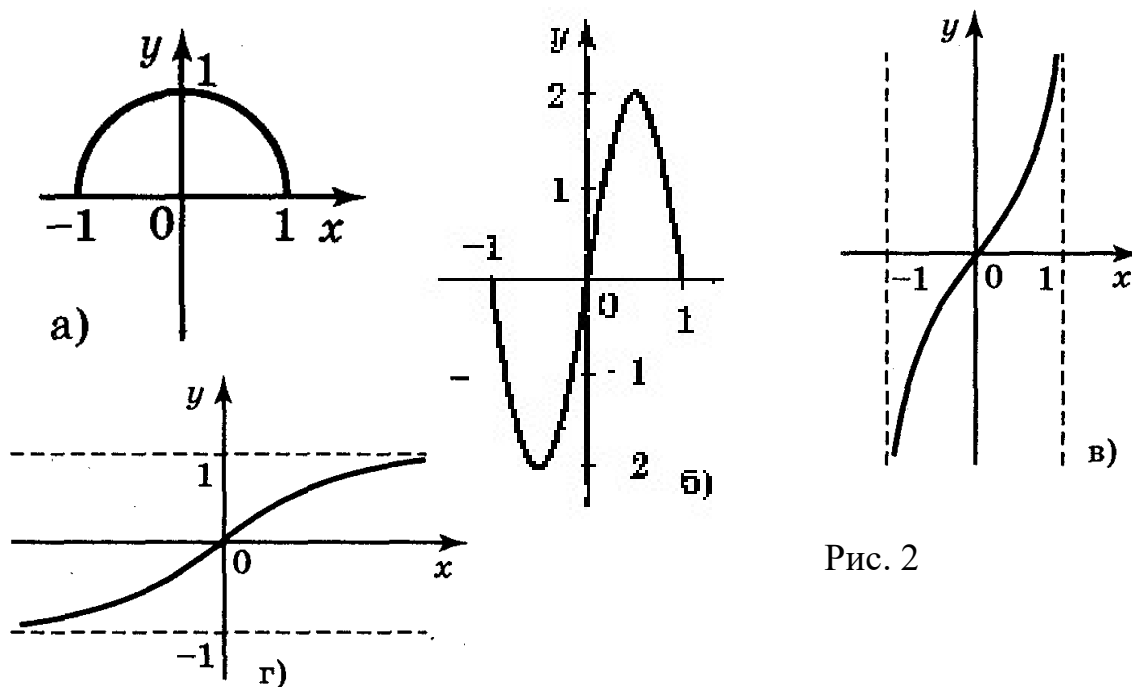


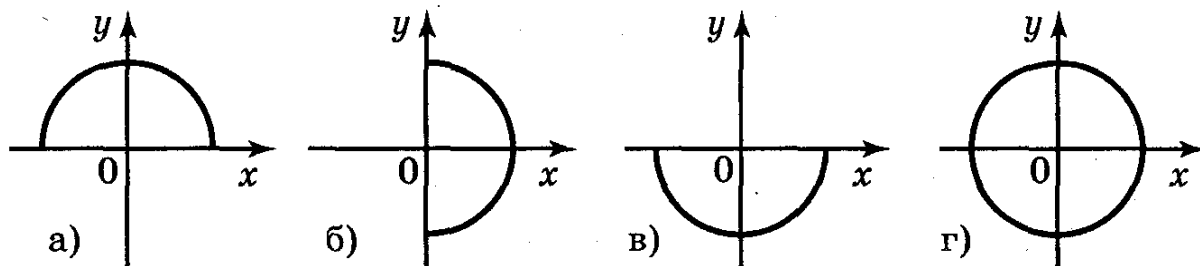
Рис. 2

Відповідь:

а) $D(y) = [-1; 1]$; $E(y) = [0; 1]$; б) $D(y) = [-1; 1]$; $E(y) = [-2; 2]$;

в) $D(y) = (-1; 1)$; $E(y) = \mathbb{R}$; г) $D(y) = \mathbb{R}$; $E(y) = (-1; 1)$.

6. Які із ліній, зображених на рисунку 3, є графіком функції? Чому?



Відповідь: а); в).

III. Систематизація і узагальнення знань учнів про спадні, зростаючі, парні та непарні функції.

! Функція $y = f(x)$ називається зростаючою (рис. 4), якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких значень x_1 і x_2 з області визначення функції таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ і навпаки: із того, що $f(x_1) < f(x_2)$ виконується нерівність $x_1 < x_2$.

! Функція $y = f(x)$ називається спадною (рис. 5), якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто для будь-яких значень x_1 і x_2 з області визначення функції таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ і навпаки: якщо $y = f(x)$ — спадна, то із того, що $f(x_1) > f(x_2)$, виконується нерівність $x_1 < x_2$.

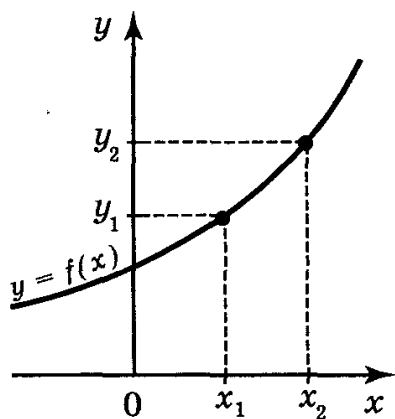


Рис. 4

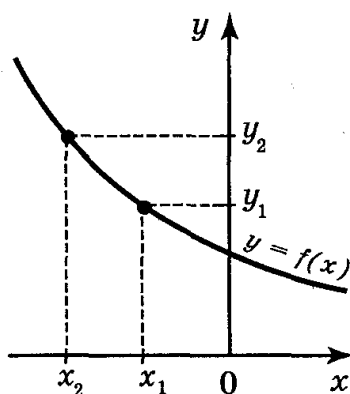


Рис. 5

Виконання вправ.

1. Користуючись графіками функцій, зображених на рисунку 6, укажіть проміжки зростання і спадання функцій.

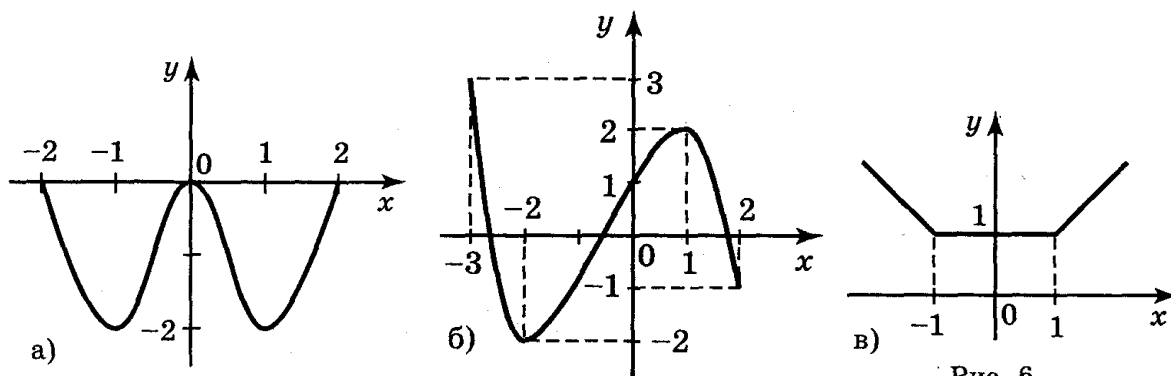


Рис. 6

Відповідь:

- а) на кожному з проміжків $[-1;0]$, $[1;2]$ функція зростає, на кожному з проміжків $[-2;-1]$, $[0;1]$ функція спадає;
 б) на кожному з проміжків $[-3;-2]$, $[1;2]$ функція спадає; на проміжку $[-2;1]$ функція зростає;
 в) на проміжку $(-\infty;-1]$ функція спадає, на проміжку $[-1; 1]$ функція постійна, на проміжку $[1;+\infty)$ функція зростає.

2. Функція $y = f(x)$ зростаюча. Порівняйте:

а) $f(10)$ і $f(-10)$; б) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ і $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Відповідь: а) $f(10) > f(-10)$; б) $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Функція $y = f(x)$ — спадна на R . Порівняйте:

а) $f(10)$ і $f(-10)$; б) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ і $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Відповідь: а) $f(10) < f(-10)$; б) $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

а) $y = x - 3$; б) $y = -x + 3$; в) $y = x^2 + 1$; г) $y = -x^2 + 1$.

Відповідь:

- а) зростає на R ; б) спадає на R ;

- в) зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$;
 г) зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

! Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо для будь-якого значення x із $D(y)$ значення $-x$ також належить $D(y)$ і виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі ОУ (рис. 7).

Приклад 1. Чи парна функція $f(x) = x^4 + x^2$?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$, функція парна.

Приклад 2. Чи парна функція $f(x) = x^2 + x$?

Оскільки $D(f) = R$, але $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$, то функція не є парною.

! Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо для будь-якого значення x із $D(y)$ значення $-x \in D(y)$ і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 8).

Приклад 3. Чи непарна функція $f(x) = x^3 - x^5$?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^5 = -x^3 + x^5 = -(x^3 - x^5) = -f(x)$, функція непарна.

Приклад 4. Чи непарна функція $f(x) = x^3 - x^2$?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 = -(x^3 + x^2) \neq f(x) = -x^3 + x^2$, функція не є непарною.

Виконання вправ

1. Які із функцій, графіки яких показано на рисунку 9, є парними, а які непарними?

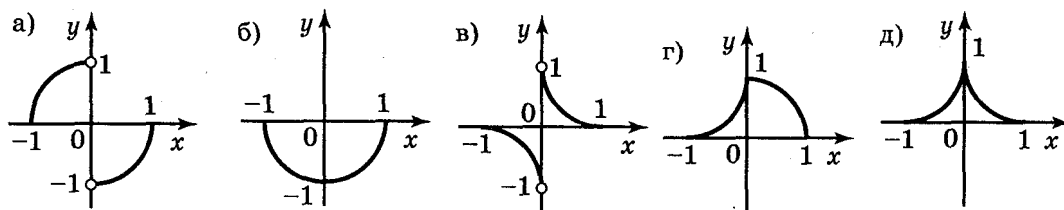


Рис. 9

Відповідь: непарні — а), в); парні — б) д).

2. Які із поданих функцій а) $y = x^3 + 2x^7$; б) $y = \sqrt{x+1}$; в) $y = |x|$;

г) $y = 3x^2 + x^6$; д) $y = x + 1$; е) $y = |x| + 1$ є парними, а які — непарними?

Відповідь: парні — в), г); е); непарні — а).

IV. Підведення підсумків уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ I § 1(1). Запитання і завдання для повторення розділу I № 1-12. Вправи № 1 (2; 5; 7), № 2 (3; 5).