

Урок 26,27

Тема уроку. *Площа бічної поверхні піраміди.*

Мета уроку:

- сформувати означення піраміди, її елементів,
- засвоїти властивості правильних пірамід;
- навчити застосовувати формули для обчислення площі повної та бічної поверхні піраміди;

Тип уроку: засвоєння нових знань, умінь, навичок.

Хід уроку

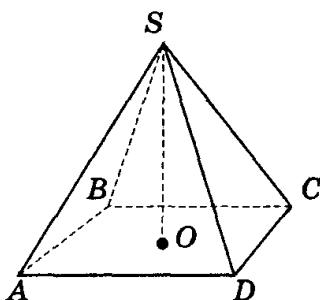
Піраміди мають багато секретів і таємниць. Але, насамперед, піраміди, а точніше Єгипетські піраміди – це одне із семи чудес світу. Чому «Все на землі боїться часу, і тільки час боїться пірамід» - говорить арабська приказка.

Серед многогранників піраміда займає особливе місце. З давніх часів люди звернули увагу на гармонійну будову цього многогранника. Вивченням пірамід займалися історики, археологи, географи. І ми з вами сьогодні будемо більше дізнаватись про піраміди. На уроці за допомогою ваших досліджень розкриємо таємниці пірамід і здобудемо знання, які не тільки розширять ваш кругозір, а й будуть необхідні при розв'язуванні практичних задач.

Ми з вами розглянемо піраміду з математичної точки зору.

Означення: ***n -кутною пірамідою*** називаєтьсямногогранник, одна грань якого — довільний n -кутник, всі інші n граней — трикутники, що мають спільну вершину.

(Демонструються моделі пірамід).



Спільну вершину трикутних граней називають **вершиною** піраміди, протилежну їй грань — **основною**, а всі інші грані — **бічними гранями** піраміди.

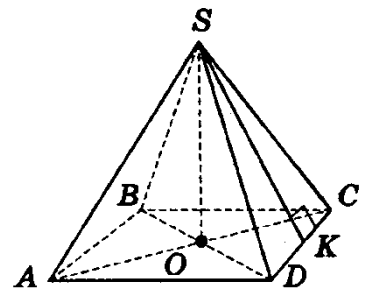
Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називають бічними ребрами.

Перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину її основи, називають **висотою** піраміди. Висотою також називають і довжину цього перпендикуляра.

На рис. зображено чотирикутну піраміду $SABCD$; точка S — її вершина, $ABCD$ — основа; SA, SB, SC, SD — бічні ребра; AB, BC, CD, AD — ребра основи, SO — висота. Трикутну піраміду називають також **тетраедром**.

Поняття правильної піраміди

Правильною пірамідою називається піраміда, в основі якої лежить правильний многокутник, а основа висоти піраміди збігається з центром цього многокутника.



Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда. Тоді за означенням її основа $ABCD$ — правильний чотирикутник (квадрат); центр квадрата точка O — основа висоти SO піраміди.

Пряма, яка містить висоту піраміди, називається **віссю правильної піраміди**.

На рис пряма SO — вісь правильної піраміди $SABCD$.

Висота бічної грані правильної піраміди, яка проведена з вершини піраміди, називається **апофемою**. На рис SK — апофема.

Теорема 1. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему піраміди. $S_{\text{біч.}} = p\ell$

Суму площ усіх бічних граней піраміди називають **площею бічної поверхні піраміди**.

Щоб знайти площу всієї поверхні піраміди, треба до площі $S_{\text{біч}}$ її бічної поверхні додати $S_{\text{осн}}$, площу основи:

$$S_{\text{пір}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}} .$$

Виконання усних вправ

1. Скільки граней, ребер має n -кутна піраміда?
(Відповідь, $n+1$ граней, $2n$ ребер.)
2. Чи може піраміда мати дві бічні грані, перпендикулярні до основи? (Так)
3. Чи можна піраміду назвати правильною (і чому), якщо:
 - а) її основа — квадрат, а основа висоти — вершина квадрата;
 - б) її основа — прямокутник, а основа висоти — точка переткнута діагоналей прямокутника;
 - в) її основа — рівносторонній трикутник, а основа висоти — точка перетину його медіан?
4. Кожне ребро тетраедра дорівнює a . Знайдіть площу його поверхні.
(Відповідь, $a^2 \sqrt{3}$.)

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 10 см, а бічне ребро — 13 см.
(Відповідь. 240 см^2 .)
2. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, у якої бічне ребро дорівнює 10 см, а апофема — 6 см. (Відповідь. 144 см^2 .)
3. Площа бічної грані правильної чотирикутної піраміди дорівнює 48 см^2 , а периметр основи — 12 см. Обчислити апофему піраміди. (Відповідь. 32 см)
4. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a . Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом 30° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди. (a^2)

Тестові завдання(виконати самостійно)

1. Піраміда — це многогранник, складений з:
 - 2) а) двох основ та відрізків, з'єднуючих основи.
 - 3) б) основ і точки, яка не лежить в площині основи

в) основи, вершини, яка не належить основі, і всіх відрізків, з'єднуючих їх

2. Відрізки, які з'єднують вершину піраміди з вершинами основ, називаються:

- а) бічні грані
- б) бічні ребра
- в) діагоналі

3. Апофема – це:

- а) висота піраміди
- б) діагональ паралелепіпеда
- в) висота бічної грані правильної піраміди

4. Перпендикуляр, що опущено з вершини піраміди на площу основи, - це:

- а) апофема
- б) висота
- в) бічне ребро

5. В якому многограннику бічна поверхня дорівнює добутку півпериметра на основу:

- а) піраміда
- б) призма
- в) паралелепіпед

6. Кожна бічна грань піраміди – це:

- а) паралелограм
- б) ромб
- в) трикутник.

7. Основою правильної чотирикутної піраміди є:

- а) довільний чотирикутник
- б) ромб
- в) квадрат.

8. Бічна грань зрізаної піраміди – це:

- а) трикутник
- б) трапеція
- в). паралелограм.

Розв'язування задач

1. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом 30° і протилежним йому катетом, що дорівнює 30 см. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60° . Знайдіть висоту піраміди.
(Відповідь. $30\sqrt{3}$ см.)
2. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою 12 см. Знайдіть висоту піраміди, якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 30° . (Відповідь. $2\sqrt{3}$ см.)
3. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і бічною стороною b . Знайдіть висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра нахилені до основи під кутом β . (Відповідь. $\frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$.)
4. В основі піраміди лежить трикутник зі стороною a і протилежним їй кутом 135° . Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° . Знайдіть висоту піраміди. (Відповідь. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.)

Розгляньте та розберіть задачу.

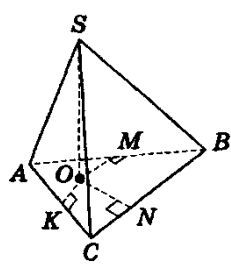
Доведіть, що бічна поверхня піраміди, в якій усі двогранні кути при основі рівні, дорівнює відношенню площі основи піраміди до косинуса лінійного кута двогранного кута на основі піраміди

Розв'язання

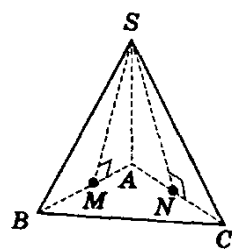
Нехай у піраміді $SABC$ $SO \perp (ABC)$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$, $OM \perp AB$; тоді за теоремою про три перпендикуляри $SK \perp AC$, $SN \perp BC$, $SM \perp AB$ (рис. 84, с. 72), тобто і $\angle SKO = \angle SNO = \angle SMO = \alpha$, отже, точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC , і $OK = ON = OM$, а також $SK = SN = SM$.

$$\begin{aligned} S_{\text{біч}} &= S_{SAB} + S_{SAC} + S_{SBC} = \frac{1}{2} SM \cdot AB + \frac{1}{2} SK \cdot AC + \frac{1}{2} SN \cdot BC = \\ &= \frac{1}{2} SK (AB + AC + BC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{OK}{\cos \angle SKO} (AB + AC + BC) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{OK \cdot (AB + AC + BC)}{\cos \alpha} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Отже, $\frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$.



Puc. 84



Puc. 85