УРОК 42

Тема уроку: Розв'язування вправ на знаходження інтегралів.
Мета уроку: Формування умінь знаходити інтеграли.

Теорема 1.7 Нехай у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)\,dx$ функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$. Введемо нову змінну t за формулою $x = u(t)$. Якщо 1) числа α і β такі, що $u(\alpha) = a,\ u(\beta) = b$; 2) функції $u(t),\ u'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt \qquad (1.10)$$

Доведення. Нехай $F(x)$ первісна функції $f(x)$ на $[a;b]$. Тоді інтеграл лівої частині рівності (1.10) обчислимо за формулою Ньютона – Лейбніца: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Доведемо, що і права частина дорівнює цьому ж числу. $\int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,du(t) = F(u(t))\Big|_\alpha^\beta = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) =$

$= F(b) - F(a)$. Рівність (1.10) доведена.

Зауважимо, що при виконанні заміни змінної у визначеному інтегралі ми не повертаємось до старої змінної x. Замість t у первісну $F(u(t))$ просто підставляємо нові межі інтегрування α і β.

Приклад.

$$\int_0^{\ln 6} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 3}} = \begin{bmatrix} t = e^x + 3, & x = 0 \Rightarrow t = e^0 + 3 = 4 \\ dt = e^x dx, & x = \ln 6 \Rightarrow t = e^{\ln 6} + 3 = 9 \end{bmatrix} = \int_4^9 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_4^9 =$$

$$= 2\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = 2$$

.