Логарифмічні нерівності

Розв’язуючи логарифмічні нерівності, спираються на такі твердження.
1. Якщо $a>1$, то нерівність $\log_a f(x)>>\log_a g(x)$ рівносильна подвійній нерівності $f(x)>g(x)>0$.
Це твердження можна записати у вигляді:

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0; \end{cases}$$

або $\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$

2. Якщо $0<a<1$, то нерівність $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ рівносильна подвійній нерівності $0<f(x)<g(x)$
.
Це твердження можна записати у вигляді:

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0; \end{cases}$$

або $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$

Зверніть увагу: при розв’язуванні логарифмічної нерівності немає сенсу окремо виписувати ОДЗ, оскільки все одно буде необхідно розв’язувати систему нерівностей, яка включає й ОДЗ.

Приклади

1) $\log_{\frac{1}{6}}(x+4)>\log_{\frac{1}{6}}\left(x^2+2x-2\right)$.

Логарифмічна функція $y=\log_{\frac{1}{6}} t$ з основою $0<\frac{1}{6}<1$ спадна, отже, дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x+4<x^2+2x-2, \\ x+4>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+x-6>0, \\ x>-4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-3, \end{array}\right. \\ x>-4. \end{cases}$$

Відповідь: $\left[\begin{array}{l} -4<x<-3; \\ x>2; \end{array}\right.$ (або у вигляді $(-4;\,-3)\cup(2;\,+\infty)$).

2) $\log_3^2 x-2\log_3 x-8\geqslant 0$.
Нехай $\log_3 x=y$.

$y^2-2y-8\geqslant 0$, $y_1=4$, $y_2=-2$.

$$\left[\begin{array}{l} y\geqslant 4, \\ y\leqslant -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_3 x\geqslant 4, \\ \log_3 x\leqslant -2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x\geqslant 81, \\ x\leqslant \frac{1}{9}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(0;\,\frac{1}{9}\right]\cup[81;\,+\infty)$ або $\left[\begin{array}{l} 0<x\leqslant \frac{1}{9} \\ x\geqslant 81. \end{array}\right.$

3) $\log_x\left(x^2+3x-3\right)>1$.

Розглянемо два випадки.

$$\begin{cases} x>1, \\ x^2+3x-3>x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x^2+2x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

$$\begin{cases} 0<x<1, \\ x^2+3x-3<x, \\ x^2+3x-3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ x^2+2x-3<0, \\ x^2+3x-3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ -3<x<1, \\ \left[\begin{array}{l} x>\frac{\sqrt{21}-3}{2}, \\ x<\frac{-3-\sqrt{21}}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{21}-3}{2}<x<1.$$

Об’єднуючи ці проміжки, одержимо відповідь.

Відповідь: $\left(\frac{\sqrt{21}-3}{2};\ 1\right)\cup(1;\ +\infty)$.

4) $\log_{|\sin x|}\left(x^2-8x+23\right)>\frac{3}{\log_2|\sin x|}$.

$|\sin x|\leqslant 1$; основою логарифма може бути тільки додатне число, яке не дорівнює 1. Виходячи з цього, отримуємо, що дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} \log_{|\sin x|}\left(x^2-8x+23\right)>3\log_{|\sin x|}2, \\ x^2-8x+23>0, \\ \sin x\neq 0, \\ \sin x\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x^2-8x+23<8, \\ x\neq \frac{\pi k}{2},\ k\in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x^2-8x+23, \\ x^2-8x+15<0, \\ x\neq \frac{\pi k}{2},\ k\in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x<5, \\ x\neq \frac{\pi k}{2},\ k\in Z. \end{cases}$$

Якщо $k=2$, то $\frac{\pi k}{2}=\pi$; $3<\pi<5$.

Якщо $k=3$, то $\frac{\pi k}{2}=\frac{3\pi}{2}$; $3<\frac{3\pi}{2}<5$.

Відповідь: $(3;\ \pi)\cup\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\ 5\right)$.