

Урок 40

Тема: Визначений інтеграл. Його геометричний зміст

Мета : засвоїти означення площі криволінійної трапеції, навчитися знаходити площу криволінійної трапеції; розглянути означення визначеного інтеграла та навчитися знаходити визначений інтеграл; засвоїти формулу Ньютона-Лейбніца та розглянути геометричний зміст визначеного інтеграла;

Властивості визначеного інтеграла

1. Визначений інтеграл від суми двох або декількох функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

2. Сталій множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx, \quad c - \text{const}$$

3. Якщо проміжок інтегрування $[a; b]$ розбити точкою c на частини, то:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. Нехай на відрізку $[a; b]$ виконано нерівність $f(x) \leq g(x)$, тоді

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad . \quad 6. \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt \quad . \quad 7. \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Справедливість властивостей 1–7 впливає або з самого означення визначеного інтеграла як границі інтегральної суми або з його геометричного змісту.

Теорема 1.5. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, тоді на цьому відрізку знайдеться таке число c , що

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a) \quad (1.7)$$

Доведення. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого M і найменшого m значення.

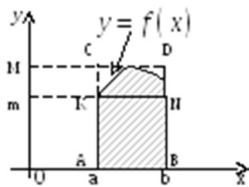


Рис. 2

Тоді з геометричного змісту визначеного інтегралу випливає нерівність

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Адже ліва і права частини цієї подвійної нерівності відповідно дорівнюють площам прямокутників $AKNB$ та $ACDB$ (рис.2), а середня частина – площі криволінійної трапеції, що заштрихована. Тоді, розділивши всі частини останньої нерівності на $b-a$, отримаємо:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$

$$C = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

Позначимо $C = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$, тоді $m \leq C \leq M$. За теоремою про середнє значення неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$, існує така точка $c \in [a; b]$, в якій

$$f(c) = C \Rightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

виконано . Помноживши обидві частин цієї рівності на $b-a$ одержимо рівність (1.7).

Домашнє завдання. Розгляньте та розтеріться.

Обговорення розв'язання домашніх вправ.

№ 10 (розділ IX)

$$1) \int_{-1}^2 (3x-1)dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 - \left(\frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 1 \right) = 6 - 2 - \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = 6 - 2 - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

3)

$$\int_1^2 (5x+1)^2 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+1)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{15} \left((5 \cdot 2 + 1)^3 - (5 \cdot 1 + 1)^3 \right) = \frac{1}{15} (11^3 - 6^3) = \frac{1}{15} \cdot 1115 = \frac{223}{3} = 74 \frac{1}{3}$$

$$5) \int_0^2 (x+2)^3 dx = \frac{(x+2)^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{256-16}{4} = \frac{240}{4} = 60.$$

$$7) \int_1^3 (x^2 - 2\sqrt{x}) dx = \int_1^3 \left(x^2 - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^3 = \frac{x^3 - 4x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_1^3 =$$

$$= \frac{3^3 - 4 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1 - 4 \cdot 1}{3} = 9 - 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 1 = 10 - 4\sqrt{3};$$

9)

$$\int_0^{\pi/3} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

.