

УРОК №32

Тема уроку: Застосування інтегралів для розв'язування прикладних задач

Дидактична мета: Поглибити й розширити знання учнів про визначений інтеграл; закріпити навички знаходити визначений інтеграл, показати його місце і значення при розв'язуванні задач фізичного, економічного, геометричного змісту; учити бачити єдину математичну модель у різних ситуаціях, складати її в нестандартних умовах; вчити учнів досліджувати й оцінювати соціальні явища засобами математики; бачити необхідність планування майбутнього; допомогти сформуванню особисте ставлення до діяльності, яка вимагає математичних знань.

Розвиваюча мета: формувати вміння виступати перед аудиторією, чітко формулювати і відстоювати свою думку; розвивати спостережливість, логічне мислення, інтелектуальні здібності учнів; сприяти розширенню їх кругозору; розвивати фізико-математичну мову учнів.

Виховна мета: виховувати патріотичні почуття, інтерес до науки шляхом звернення до історичних джерел, вміння раціонально використовувати робочий час.

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації навчального матеріалу.

Обладнання: діючий підручник, робочі зошити, таблиці, комп'ютер, комп'ютерні програми; картки, ТВ, презентація до уроку.

Хід уроку:

I. Організаційний момент

Дорогі діти!

За вікном сьогодні чудова погода, блакитне чисте небо, сонячно. І така сама тепла атмосфера і у нас в класі.

З'являється учень 5 – го класу

Реклама інтеграла

Реклама

Я – Інтеграл. Я все можу: обчислити і площу криволінійної трапеції, і площу фігури, обмеженої лініями. А якої популярності я набув при застосуванні до геометрії! При моїй допомозі просто доводять формули обчислення об'єму многогранників, тіл обертання. Застосовують мене до фізики, де я допомагаю знайти формулу шляху за відомим законом зміни швидкості.

А яка краса, коли я обчислюю об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо координатних осей!

Незамінним буду я вам і при вивченні багатьох технічних наук.

Дякую Ньютону і Лейбніцу, які в свій час зуміли відкрити мої потенціальні можливості. Тому, юні друзі, дружить зі мною: я постараюсь і надалі служити математичній науці, яка покликана зміцнювати державу, дбати про добробут її громадян.

Ваш помічник і сумлінний трудяга Інтеграл.

II. Мотивація навчальної діяльності.

Ми з вами сьогодні спробуємо за допомогою математики розв'язати проблеми, що виникають на уроках фізики та економіки.

Послухайте, будь-ласка, вислів відомого італійського вченого **Галілео Галілея**.

("Філософія написана в тій книзі, яка завжди відкрита в нас перед очима (я маю на увазі Всесвіт), але яку неможливо зрозуміти, якщо заздалегідь не вивчити її мову".)

Її мова – це мова математики. Математика здавна має репутацію найточнішої галузі знань і є надійним знаряддям розкриття таємниць природи.

А що з цього приводу говорив знаменитий **Альберт Ейнштейн**?

("Наш досвід переконує нас, що природа – це реалізація найпростіших математичних ідей".)

А як відзначував відомий вам **Рене Декарт**?

("Той, хто серйозно прямує до пізнання істини, не повинен займатися якоюсь однією наукою, бо всі вони взаємозв'язані")

III. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

1) Шість учнів із картками біля дошки

КАРТКА 1

Побудувати і обчислити площу фігури, обмеженої лініями:
 $y = x^3$, $x = 0$, $x = 2$.

Відповідь: 4 кв.од

КАРТКА 2

Знайти площу заштрихованої фігури

$$S_1 = 88$$

$$S_2 = 48$$

$$S_3 = 4$$

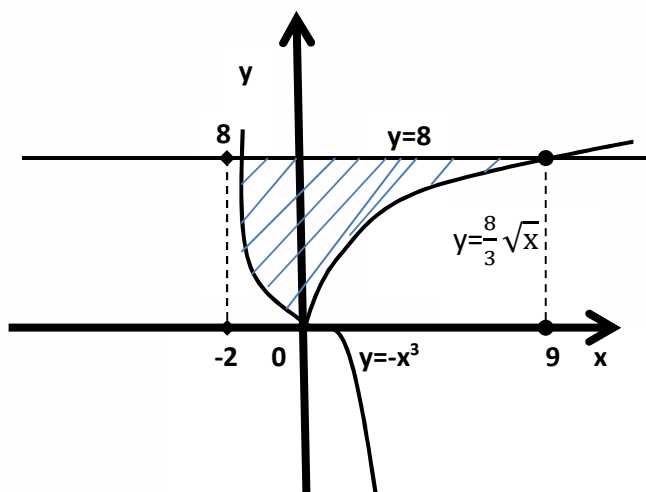
$$S_{\text{ф}} = 88 - 48 - 4 = 36$$

Відповідь: 36 кв.од

КАРТКА 3

Побудувати і обчислити площу фігури, обмеженої лініями:
 $y = 4$, $y = x^2$, $x = -2$, $x = 2$.

$$S_{\text{ф}} = 16/3 \quad \text{Відповідь: } 16/3 \text{ кв.од}$$



КАРТКА 4

Побудувати і обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2$, $y = 1$.

Відповідь: 2/3 кв.од

КАРТКА 5

Для заданої функції $y = 3x^2 - 2x - 3$ Знайти таку первісну, щоб її графік проходив через точку $A(3;9)$

Відповідь: $F(x) = x^3 - x^2 - 3x$

КАРТКА 6

Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = t^3 + t$ (м/с). знайти шлях, пройдений тілом за проміжок часу від $t = 1$ с до $t = 2$ с

Відповідь: 5,25 (м)

2) Решта учнів відповідають на запитання вчителя:

Знайти невизначений інтеграл:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x ?$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int dx = x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

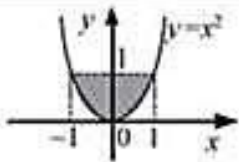
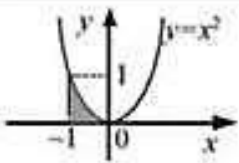
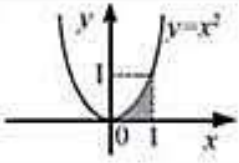
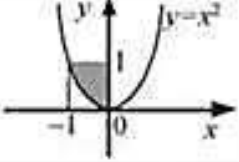
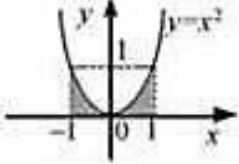
$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \sqrt{x}$$

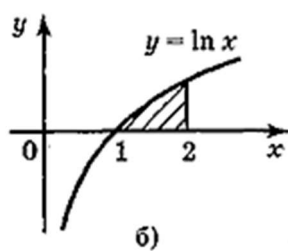
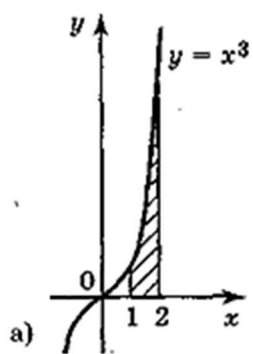
3) На дошці малюнки та відповідні визначені інтеграли

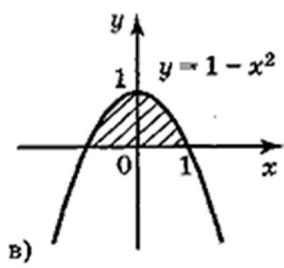
Установити відповідність між інтегралами та їхніми геометричними інтерпретаціями

1 $\int_{-1}^0 (1-x^2) dx$	А 
2 $\int_{-1}^1 x^2 dx$	Б 
3 $\int_0^1 x^2 dx$	В 
4 $\int_{-1}^1 (1-x^2) dx$	Г 
	Д 

Відповідь: 1-г, 2 – д, 3 – в, 4 - а

4) Запишіть за допомогою інтеграла площі фігур, зображених на рисунку





а) $\int_1^2 x^3 dx$; б) $\int_1^2 \ln x dx$; в) $\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$;

Відповіді:

5) Побудуйте схематично фігури, площі яких виражаються такими інтегралами:

а) $\int_0^1 x dx$; б) $\int_1^2 x^2 dx$; в) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$; г) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$.

Відповідь: рис. 98.

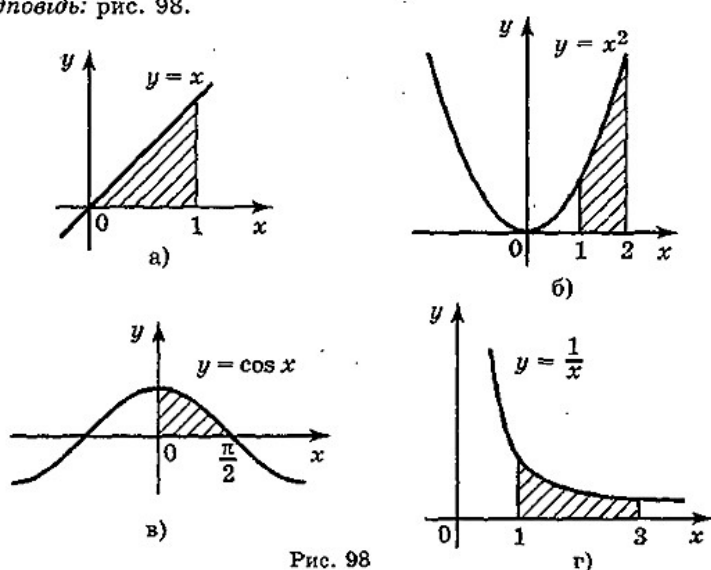


Рис. 98

IV. Повідомлення теми та мети уроку

Будемо сподіватися, що за допомогою слів великих вчених, вислови яких ми цитували, ми переконались в доцільності проведення сьогоднішнього уроку, тема якого: "Застосування інтегралів для розв'язування прикладних задач".

До речі, задача (англ. problem) означає "проблема". Проблема розв'язування задач ускладнюється в тому випадку, якщо вміння побачити єдину математичну модель у різних ситуаціях недостатньо розвинене. Але ж ще Анрі Пуанкаре, французький математик, слова якого ми взяли як епіграф до нашого уроку, сказав: **"Математика є спосіб називати різні речі одним ім'ям"**. Можливість розвивати ці уміння ви й матимете сьогодні, розв'язуючи задачі, пов'язані з геометрією, фізичними явищами, економічними процесами. І ви матимете чудову нагоду закріпити і розвинути навички знаходити визначений інтеграл, застосовувати його при розв'язуванні практичних задач.

V. Актуалізація опорних знань учнів.

Давайте пригадаємо, з яким поняттям нерозривно пов'язане поняття визначеного інтегралу?(Площа)

А зараз, відповідаючи на питання вікторини "Що? Де? Як? Чому?", ми налаштуємося на розгляд більш складних проблем.

1. Що таке первісна? (Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$.)
2. Назвіть, будь ласка, формулу Ньютона – Лейбніца.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

3. Яка головна відмінність визначеного інтегралу від невизначеного? (Невизначений інтеграл – це функція, а визначений – число).
4. Що таке криволінійна трапеція?
5. В чому полягає фізичний зміст первісної? (під час прямолінійного руху переміщення s чисельно дорівнює $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$, де $v(t)$ – швидкість руху)

VII. Узагальнення та систематизація знань, вмінь та навичок.

Поняття інтеграла – важливе як у шкільному курсі математики, так і в курсі вищої математики, що розгалужується на низку цікавих, хоч і складних, математичних дисциплін. Назву вам лише кілька з них:

- математичний аналіз,
- функціональний аналіз,
- теорія функції комплексної змінної,
- диференціальні рівняння,
- теорія ймовірностей,
- теорія оптимізації математичних процесів.

Окрім математичних, є науки, що широко використовують математичний апарат і нині дуже популярні, оскільки необхідні для ведення різноманітних справ, для гармонійного розвитку галузей виробництва, тощо. У цих науках також використовується поняття інтеграла. Серед них такі як

- економіка виробництва,
- фінансова справа,
- електроніка,
- програмування,
- фізика,
- хімія,
- радіофізика, тощо.

Давайте з'ясуємо, як саме ми можемо застосувати визначений інтеграл в таких науках, як геометрія, фізика, економіка.

Підкажіть, де саме визначений інтеграл застосовується в геометрії?

1) Обчислення площі криволінійної трапеції

- 2) Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням графіка функції навколо вісі Ох:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

- 3) Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням графіка функції навколо вісі Оу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(y) dy.$$

А де саме визначений інтеграл застосовується у фізиці?

№ пп	Величини	Співвідношення	Знаходження похідної	Знаходження інтеграла
1	S – переміщення v -- швидкість	$\Delta S = v(t) \cdot \Delta t$	$v(t) = S'(t)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
2	A - робота F - сила	$\Delta A = F(x) \cdot \Delta x$	$F(x) = A'(x)$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$
3	A - робота N - потужність	$\Delta A = N(t) \cdot \Delta t$	$N(t) = A'(t)$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$
4	m – маса тонкого стержня ρ - лінійна густина	$\Delta m = \rho(x) \cdot \Delta x$	$\rho(x) = m'(x)$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$
5	q – електричний заряд I – сила струму	$\Delta q = I(t) \cdot \Delta t$	$I(t) = q'(t)$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
6	Q – кількість теплоти c - теплоємність	$\Delta Q = c(t) \cdot \Delta t$	$c(t) = Q'(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$

VIII. Робота в групах

А зараз, панове, давайте перенесемося в майбутнє, років на 20 вперед. Ви – дорослі, солідні люди, знайшли своє місце в житті: конструктори, інженери, металурги, будівельники, економісти, плановики, вчені. І в процесі своєї роботи ви зустрічаєтеся з різними проблемами, які вам необхідно вирішити.

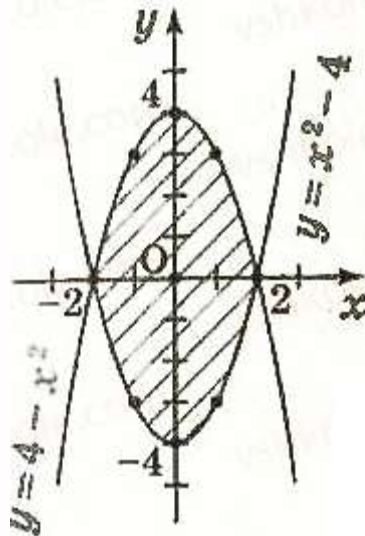
Розіб'ємо клас на 5 груп, кожна з яких отримує певне завдання і через 5 хвилин звітує про виконану роботу.

Фінансисти

На полі пшениці після приземлення космічного корабля залишився слід, який нагадує фігуру, обмежену лініями $y = x^2 - 4$ та $y = 4 - x^2$. Необхідно визначити збитки, завдані агрокомплексу «Олімпекс-Агро», якщо з 1 м² отримують в середньому 4 кг пшениці, яка коштує 3 грн. / кг.

Розв'язання:

$$y = x^2 - 4; y = 4 - x^2.$$



$$x^2 - 4 = 4 - x^2; 2x^2 = 8; x^2 = 4;$$

$x = \pm 2$ — межі інтегрування.

$$S = 2 \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 =$$

$$= 8 \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 2^3 - \left(2 \cdot (-8) - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 \right) =$$

$$= 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = 32 - \frac{32}{3} = 32 - 10\frac{2}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

$$V = 21 \cdot 4 \cdot 3 = 252 \text{ (грн.)}.$$

Відповідь. 252 грн.

Археологи

Нещодавно археологи при розкопуванні стародавніх поселень знайшли жертвне місце, яке їх дуже зацікавило. Після досліджень було з'ясовано, що це тіло, утворене обертанням параболи $y = x^2 + 1$ навколо вісі Ох (х вчені вимірювали в метрах), обмеженої лініями $x = 2$, $y = 0$. Причому виготовлений він був з каменю густиною (ρ) 2500 кг/м^3 . Яка масу каменя використали на виготовлення цього жертovníка стародавні майстри? ($m = V \cdot \rho$)

Розв'язання.

Об'єм тіла, яке утворюється внаслідок обертання графіка функції навколо вісі Ох обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$V = \pi \int_1^2 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_1^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right) - \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{206}{15} \pi - \frac{28}{15} \pi = \frac{178\pi}{15};$$

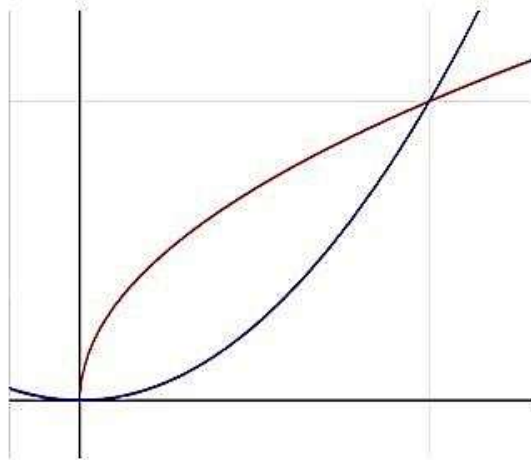
$$V = \frac{178}{15} \cdot 3,14 = 37,26$$

$$m = V \cdot \rho ; m = 37,26 \cdot 2500 = 93150 \text{ кг}$$

Відповідь. 93150 кг.

Біологи

Знайти площу пелюстка ромашки, який розміщено між дугами парабол $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$.



Розв'язання: Дана фігура обмежена графіками двох функцій:

$$y=x^2 \text{ та } y=\sqrt{x}.$$

Шукана площа за допомогою інтеграла обчислюється так:

$$S = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2) dx = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь. 1/3 кв. од.

Енергетики

Навантаження на Криворізьку теплоелектростанцію задається функцією $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$. Визначити витрати електроенергії протягом доби.

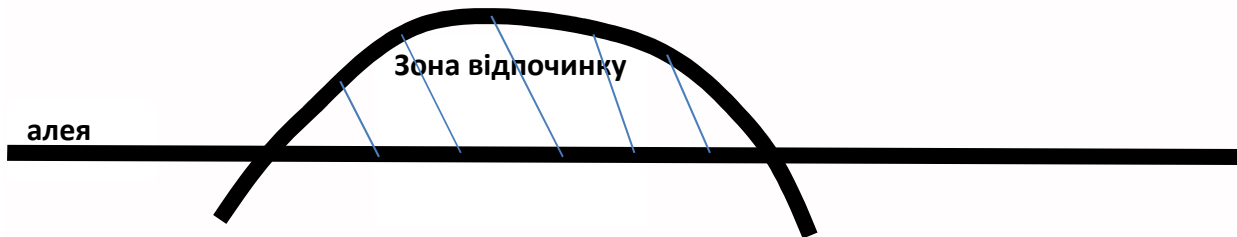
Розв'язання:

$$\int_0^{24} (3x^2 + 4x - 2) dx = \left(x^3 + 2x^2 - 2x \right) \Big|_0^{24} = 13824 + 576 - 48 = 14343 \text{ (кВт·год)}$$

Відповідь: 14343 кВт·год.

Архітектори

Будівельникам потрібно обладнати бруківкою зону відпочинку біля житлового будинку. За планом архітектора зона проходить побіля зеленої алеї та утворює криву $y = 3x - x^2$. Який кошторис цієї зони відпочинку, якщо вважати, що лінія алеї збігається з віссю ОХ (див. рис.), а бруківка коштує 250 грн. за кв.м.? Одиниці вимірювання – 100 м.



Розв'язання:

Якщо алея збігається із віссю ОХ, а крива є параболою то спочатку потрібно знайти точки перетину параболи з віссю ОХ:

$3x - x^2 = 0$, $x = 0$, $x = 3$ – це межі інтегрування.

$$S = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 4,5$$

$S = 4,5 \cdot 100 = 450 \text{ м}^2$, тоді кошторис складає $450 \cdot 250 = 112500$ грн.

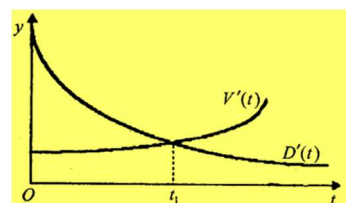
Відповідь: 112500 грн.

Математика – потужна зброя в руках фізика, економіста. Адже багато наслідків можна одержати математично, використовуючи перевірені дослідом формули. Зараз ваші товариші покажуть, як використовуючи цю зброю, вони виконали своє завдання.

ІНТЕГРАЛ В ЕКОНОМІЦІ

Загальний прибуток за час t_1 можна знайти за формулою:

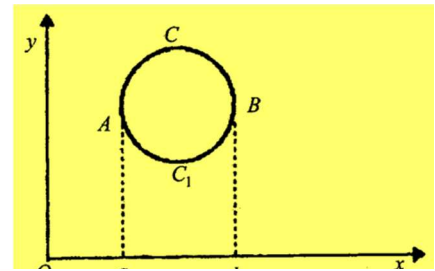
$$P(t) = \int_0^{t_1} P'(t) dt = \int_0^{t_1} (D'(t) - V'(t)) dt$$



ІНТЕГРАЛ В БІОЛОГІЇ

Середня довжина шляху, який пролітають птахи, перетинаючи деяку фіксовану ділянку, обчислюється за формулою:

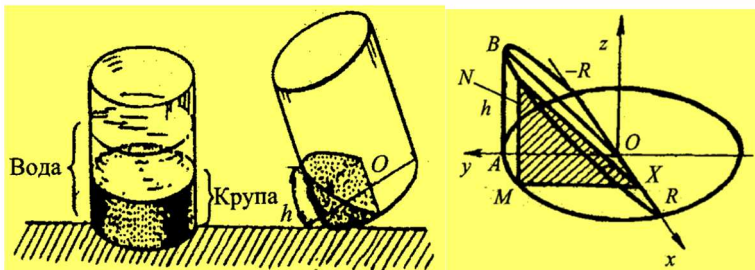
$$L = \frac{\int_a^b (f(x) - f_2(x)) dx}{b - a} = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi R}{2}$$



ІНТЕГРАЛ В ПОБУТІ

Щоб каша була смачною, потрібно таке відношення води і круп:

$$\frac{V_{\text{в}}}{V_{\text{кр}}} = \pi - 1$$



Х. Підведення підсумків уроку. Вправа «Рефлексія»

«Як приємно дізнатися, що ти чогось навчився». Мольєр

Скажіть, будь ласка, що саме ми з вами робили сьогодні на уроці?

(розв'язували задачі з геометрії, фізики, економіки, перекладали мовою математики проблеми, які стоять перед іншими науками.)

На сьогоднішньому уроці ми ще раз переконалися в тому, що математичні теорії є надійним знаряддям в розкритті таємниць природи, законів економічних процесів.

Звертаю вашу увагу, шановні добродії, на програмові вимоги та підборку завдань для підготовки до незалежного зовнішнього тестування, поміщену у вашому Кроці до майстерності з даної теми.

Ще одну вершину підкорили:

Його величність інтеграл

Для себе ми відкрили.

І від тепер об'єми тіл

І площі всіх фігур

Підвладні нам.

Низький уклін тобі

Величність ІНТЕГРАЛ!

ХІІ. Домашнє завдання. Розв'язати стор. 278 – 280 тест №3 (12-17)

Загальні висновки вчителя:

На уроці досягнута дидактична, виховна, розвивальна мета. План уроку виконаний повністю. Урок розрахований на клас академічного рівня, відповідно якого підбиралися завдання для розв'язання на уроках. Урок націлений на: поглиблення й розширення знань учнів про визначений інтеграл; міжпредметні зв'язки; майбутню професію; вибір ЗНО з математики; вміння виступати перед аудиторією; чітко формулювати і відстоювати свою думку; інтерес до науки шляхом звернення до історичних джерел; вміння раціонально використовувати робочий час.

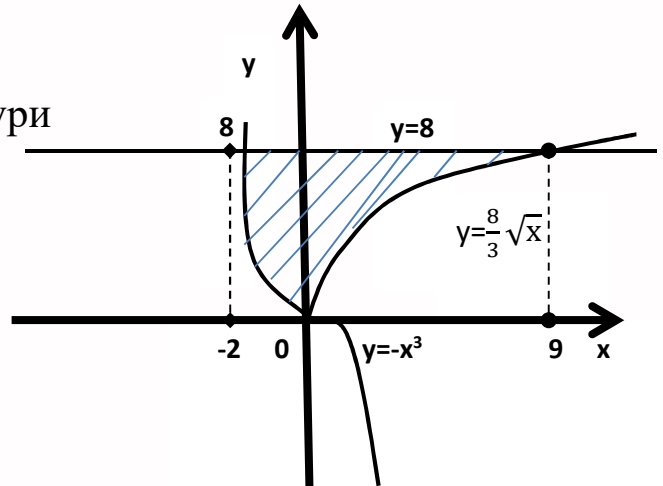
КАРТКА 1

Побудувати і обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = x^3, x = 0, x = 2.$$

КАРТКА 2

Знайти площу заштрихованої фігури



КАРТКА 3

Побудувати і обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 4, y = x^2, x = -2, x = 2.$$

КАРТКА 4

Побудувати і обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2, y = 1$.

КАРТКА 5

Для заданої функції $y = 3x^2 - 2x - 3$ Знайти таку первісну, щоб її графік проходив через точку $A(3;9)$

КАРТКА 6

Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = t^3 + t$ (м/с). знайти шлях, пройдений тілом за проміжок часу від $t = 1$ с до $t = 2$ с

Реклама

Я – Інтеграл. Я все можу: обчислити і площу криволінійної трапеції, і площу фігури, обмеженої лініями. А якої популярності я набув при застосуванні до геометрії! При моїй допомозі просто доводять формули обчислення об'єму многогранників, тіл обертання. Застосовують мене до фізики, де я допомагаю знайти формулу шляху за відомим законом зміни швидкості.

А яка краса, коли я обчислюю об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо координатних осей!

Незамінним буду я вам і при вивченні багатьох технічних наук.

Дякую Ньютону і Лейбніцу, які в свій час зуміли відкрити мої потенціальні можливості. Тому, юні друзі, дружить зі мною: я постараюсь і надалі служити математичній науці, яка покликана зміцнювати державу, дбати про добробут її громадян.

Ваш помічник і сумлінний трудяга Інтеграл.

Фінансисти

На полі пшениці після приземлення космічного корабля залишився слід, який нагадує фігуру, обмежену лініями $y = x^2 - 4$ та $y = 4 - x^2$. Необхідно визначити збитки, завдані агрокомплексу «Олімпекс-Агро», якщо з 1 м^2 отримують в середньому 4 кг пшениці, яка коштує 3 грн. / кг .

Археологи

Нещодавно археологи при розкопуванні стародавніх поселень знайшли жертвне місце, яке їх дуже зацікавило. Після досліджень було з'ясовано, що це тіло, утворене обертанням парабол $y = x^2 + 1$ навколо вісі Ox (x вчені вимірювали в метрах), обмеженої лініями $x = 2$, $y = 0$. Причому виготовлений він був з каменю густиною (ρ) 2500 кг/м^3 . Яка масу каменя використали на виготовлення цього жертovníка стародавні майстри? ($m = V \cdot \rho$)

Біологи

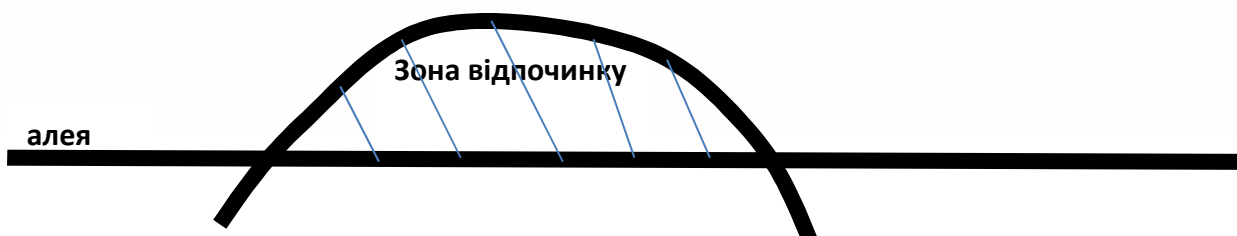
Знайти площу пелюстка ромашки, який розміщено між дугами парабол $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$.

Енергетики

Навантаження на Криворізьку теплоелектростанцію задається функцією $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$. Визначити витрати електроенергії протягом доби.

Архітектори

Будівельникам потрібно обладнати бруківкою зону відпочинку біля житлового будинку. За планом архітектора зона проходить побіля зеленої алеї та утворює криву $y = 3x - x^2$. Який кошторис цієї зони відпочинку, якщо вважати, що лінія алеї збігається з віссю Ox (див. рис.), а бруківка коштує $250 \text{ грн. за кв.м.}$? Одиниці вимірювання – 100 м .



Тема уроку: Застосування інтеграла до обчислення площ плоских фігур

Мета уроку: Формувати уміння застосовувати інтеграл до обчислення площ фігур; розвивати пізнавальний інтерес учнів; сприяти виробленню умінь використовувати свої знання в нових ситуаціях; сприяти розширенню кругозору; виховувати вміння раціонально використовувати робочий час.

Тип уроку: інтегрований урок.

Обладнання: дидактичні матеріали, схеми алгоритмів, мультимедійне обладнання, комп'ютерна програма Advanced Grapher, комп'ютери.

ХІД УРОКУ

1.Організаційний момент.

Добрий день, любі діти! Сьогодні у нас незвичайний урок – інтегрований урок математики та інформатики.

Тема нашого уроку «Застосування інтеграла до обчислення площ плоских фігур»

Для початку, я хочу дізнатись, що Ви очікуєте від сьогоднішнього уроку? (технологія «Мікрофон»)

Дуже добре! Наприкінці уроку ми дізнаємось, чи справились Ваші сподівання.

2.Перевірка домашнього завдання.

Математичний диктант

1) $\int_0^1 x dx;$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx;$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} dx;$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$

3) $\int_1^3 dx;$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x};$

В той час, коли проходить математичний диктант, деякі учні виконують індивідуальні завдання (на картках).

Приклад картки

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y=2\cos x, \quad y=0, \quad x=-\pi/2, \quad x=\pi/2$$

3.Актуалізація опорних знань:

1.Фронтальне опитування:

- дайте визначення первісної;
- сформулюйте властивості первісної;
- дайте означення визначеного інтеграла;
- як відбувається обчислення визначеного інтеграла?
- формула Ньютона – Лейбніца;
- яка відмінність між невизначеним інтегралом і визначеним інтегралом?
- яка фігура називається криволінійною трапецією?
- як знайти координати точок перетину графіків функцій $f(x)$ і $q(x)$?

2.Обчислення визначених інтегралів.

На дошці зашифровано вислів «Добре того навчати, хто хоче все знати»

$$16 \ 40 \ -\frac{1}{2} \ 192 \ 8 \ \frac{1}{2} \ \frac{14}{3}$$

1. $\int_1^4 \sqrt{x} dx;$

2. $\int_0^2 4x^3 dx;$

3. $\int_0^4 3x^3 dx;$

4. $-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx;$

5. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$

6. $\int_0^{0.5} 3x^2 dx + \int_{0.5}^2 3x^2 dx;$

7. $\int_4^{12} 5 dx.$

4. Засвоєння знань.

На попередніх уроках ми обчислювали площі криволінійних трапецій.

Але на практиці часто доводиться обчислювати площі фігур, які не є криволінійними трапеціями.

Якщо треба обчислювати площу фігури, обмеженої декількома лініями, то знаходять криволінійні трапеції, перерізом або об'єднанням яких є дана фігура, обчислюють площу кожної з них, і знаходять різницю або суму площ цих криволінійних трапецій.

У цих випадках використовують такі властивості площ:

- якщо фігуру розбити на скінченне число фігур, які не мають спільних внутрішніх точок, то її площа дорівнює сумі площ цих фігур;

- площа фігури зберігається при переміщенні, зокрема, при паралельному перенесенні і перетворенні симетрії відносно точки і прямої.

Розглянемо приклади знаходження площ плоских фігур (на слайдах).

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $\pi \leq x \leq 2\pi$.

Приклад 2. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2$ та $y = -x + 2$.

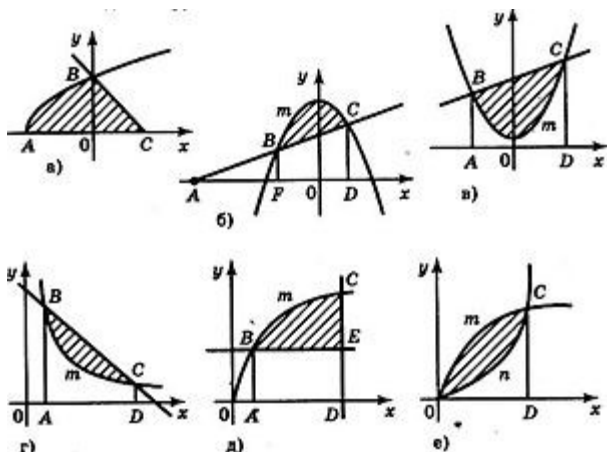
Приклад 3. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = 2x - x^2$ та віссю OX .

5. Формування вмінь.

Виконаємо вправи для формування умінь і навичок обчислення площі плоскої фігури.

1. Робота в парах.

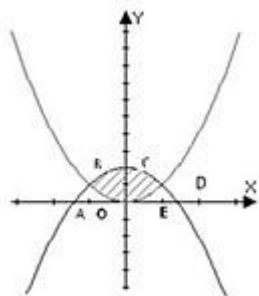
Записати площі заштрихованих фігур як суму або різницю площ криволінійних трапецій, обмежених графіками відомих функцій:



2. Обчислимо площу фігури, обмеженої лініями (колективно): $y = x^2$ та $y = -x^2 + 2$ (учень біля дошки)

Розв'язання:

Будуємо графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x^2 + 2$.



Знаходимо абсциси точок перетину графіків $x^2 = -x^2 + 2$, $2x^2 = 2$, $x = \pm 1$.

Шукана площа обмежена кривими BCD і BOD.

Ця площа дорівнює різниці площ криволінійних трапецій ABCDE і BAOED.

$$S = \int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - x^2) dx = \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx =$$

$$= \left(-\frac{2x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = -\frac{2}{3} + 2 - \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{4}{3} \text{ кв. од.}$$

Вчитель: Розв'яжемо подібну задачу за допомогою програми Advanced Grapher.

Це досить потужна, але легка у використанні програма, призначена для побудови графіків, креслення кривих і обчислення функцій. Advanced Grapher допоможе вам побудувати різні графіки і провести їхній аналіз.

Завдання. Знайти площу фігури, обмежену графіком функції $y = \frac{8}{4+x^2}$ та прямою $y = 1$.

Виконаємо наступний алгоритм дій.

1. Запускаємо програму Advanced Grapher.
2. Будуємо в системі координат відповідні графіки функцій. Для цього заходимо в розділ «Побудова», вибираємо «Додати графік» та вписуємо формулу функції $y = 8/(4+x^2)$.
- Аналогічно будуємо графік другої функції $y = 1$.
3. Заходимо в розділ «Обчислити», вибираємо «Інтегрування» та вказуємо основні лінії.
4. Дістаємо шукану площу даної фігури (як видно з рисунка).
5. Для того щоб одержати візуально заштриховану область фігури, необхідно виконати такі дії: натиснути клавіші «Додати графік» та «ОК».

А зараз я хочу вам розказати про одну із визначних кривих – Везієра Аньєзі. Ця крива названа на честь італійського вченого Аньєзі, бо цей вчений розглядав та досліджував її. До речі, це жінка Марія-Гаетана Аньєзі. Крива має такий

$$y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$$

вигляд (на комп'ютері, у програмі Advanced Grapher). Формула цієї визначної кривої $y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$, де a – це діаметр кола, що дотикається до кривої Аньєзі з одного боку, а з іншого проходить через початок координат. У програмі Advanced Grapher ми будували криву, де діаметр цього кола дорівнює 2. Побудову цієї кривої вказав італійський вчений Гвідо Гранді, йому і належить термін «верзієра», це слово походить від терміна «sinus versus», що означає «обернений синус», але воно має ще одне значення, з італійської воно перекладається ... (Д/з)

6. Підсумок уроку.

Отже, сьогодні ми з вами розглянули фігури, які утворюються внаслідок об'єднання чи перетину двох криволінійних трапецій та вчилися знаходити їх площі, а також познайомилися з програмним забезпеченням Advanced Grapher - робота з графіками і функціями. Ця програма може стати вам в нагоді не тільки в школі, а й при навчанні у вищому навчальному закладі.

7. Рефлексія.

А зараз пригадайте, що Ви очікували на початку уроку і продовжте речення. Що Вам сподобалось на уроці? Що не сподобалось?.

- Я дізнався ...
- Було складно ...
- Я зміг ...
- Я хотів би ...
- Мені запам'яталось ...
- Я спробую ...

8. Домашнє завдання.

№№ ____, ____

Скласти кросворд на тему «Первісна та інтеграл».

Знайти переклад слова «верзієра»

Слово вчителя.

Діти, дуже дякую Вам за урок. Приємно, що Ви такі активні, життєрадісні, розумні. Будьте такими завжди! До побачення!